Chapitre 10

Thermodynamique des milieux continus

10.1 Bilan de substance chimique

On considère un fluide homogène et uniforme constitué de différentes substances chimiques réactives.

1) Déterminer le taux de variation $\dot{n}_A$ de la densité de substance chimique A.
2) En considérant le régime stationnaire, déterminer la condition imposée sur les coefficients stœchiométriques ν_{aA}.

$\boxed{10.1}$ Solution

1) Pour un système uniforme, les divergences de la vitesse $\boldsymbol{v}$ et de la densité de courant chimique $\boldsymbol{j}_A$ sont nulles,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_A = 0$$

Par conséquent, l'équation de continuité (10.26) pour la substance chimique A se réduit à,

$$\dot{n}_A = \sum_{a=1}^{n} \omega_a\,\nu_{aA}$$

2) En régime stationnaire,

$$\dot{n}_A = 0$$

ce qui implique que les coefficients stœchiométriques satisfont la condition,

$$\sum_{a=1}^{n} \omega_a\,\nu_{aA} = 0$$

10.2 Dérivée temporelle et gradient de pression

1) Déterminer l'expression de la dérivée temporelle de la pression.
2) Déterminer l'expression du gradient de pression.

10.2 Solution

1) Compte tenu des expressions (10.86) et (10.71), la densité d'énergie interne u est donnée par,

$$u = T\,s - \,p + \sum_{A=1}^{r} \mu_A\, n_A + q\,\varphi$$

La dérivée temporelle de la densité d'énergie interne u s'écrit,

$$\dot{u} = s\,\dot{T} + T\,\dot{s} - \,\dot{p} + \sum_{A=1}^{r} \left(n_A\,\dot{\mu}_A + \mu_A\,\dot{n}_A\right) + \varphi\,\dot{q} + q\,\dot{\varphi}$$

Comme la densité d'énergie interne $u\,(s, \{n_A\}, q)$ est une densité de fonction d'état, sa dérivée temporelle s'écrit,

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial s}\,\dot{s} + \sum_{A=1}^{r} \frac{\partial u}{\partial n_A}\,\dot{n}_A + \frac{\partial u}{\partial q}\,\dot{q}$$

Compte tenu des définitions (10.77) des variables intensives température T, potentiel chimique μ_A de la substance A et potentiel électrostatique φ,

$$\dot{u} = T\,\dot{s} + \sum_{A=1}^{r} \mu_A\,\dot{n}_A + \varphi\,\dot{q}$$

En identifiant les deux expressions de la dérivée temporelle de la densité d'énergie interne, on obtient l'expression de la dérivée temporelle de la pression,

$$\dot{p} = s\,\dot{T} + \sum_{A=1}^{r} n_A\,\dot{\mu}_A + q\,\dot{\varphi}$$

2) Le gradient de la densité d'énergie interne u s'écrit,

$$\boldsymbol{\nabla}\,u = s\,\boldsymbol{\nabla}\,T + T\,\boldsymbol{\nabla}\,s - \,\boldsymbol{\nabla}\,p + \sum_{A=1}^{r} \left(n_A\,\boldsymbol{\nabla}\,\mu_A + \mu_A\,\boldsymbol{\nabla}\,n_A\right) + \varphi\,\boldsymbol{\nabla}\,q + q\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi$$

Comme la densité d'énergie interne $u\,(s, \{n_A\}, q)$ est une densité de fonction d'état, le gradient de la densité d'énergie interne s'écrit,

$$\boldsymbol{\nabla}\,u = \frac{\partial u}{\partial s}\,\boldsymbol{\nabla}\,s + \sum_{A=1}^{r} \frac{\partial u}{\partial n_A}\,\boldsymbol{\nabla}\,n_A + \frac{\partial u}{\partial q}\,\boldsymbol{\nabla}\,q$$

Compte tenu des définitions (10.77) des variables intensives,

$$\nabla u = T \nabla s + \sum_{A=1}^{r} \mu_A \nabla n_A + \varphi \nabla q$$

En identifiant les deux expressions du gradient de la densité d'énergie interne, on obtient l'expression du gradient de pression,

$$\nabla p = s \nabla T + \sum_{A=1}^{r} n_A \nabla \mu_A + q \nabla \varphi$$

10.3 Récipient contenant de l'huile et de l'eau

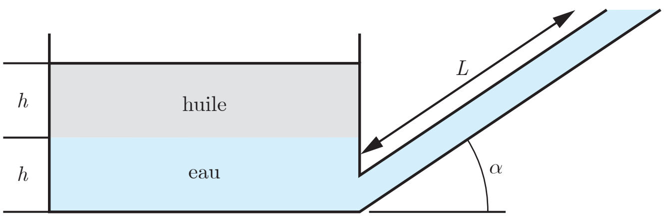

Fig. 10.1 Un récipient contient des hauteurs égales d'eau et d'huile et l'eau remplit entièrement le bec de longueur L.

Un récipient avec un long bec est rempli d'huile et d'eau de sorte que le bec soit rempli jusqu'à son extrémité (fig. 10.1). L'eau et l'huile sont en contact avec l'atmosphère. Les hauteurs h de l'eau et de l'huile sont les mêmes dans le récipient. Déterminer l'expression de l'angle d'inclinaison α du bec de longueur L en termes des densités de masse m_e et m_h de l'eau et de l'huile.

$\boxed{10.3}$ Solution

La pression hydrostatique p au fond du récipient est la somme de la pression atmosphérique p_0, de la pression de l'huile $m_h\, g\, h$ et de la pression de l'eau $m_e\, g\, h$,

$$p = p_0 + m_h\, g\, h + m_e\, g\, h$$

La pression hydrostatique au bas du bec est égale à la pression hydrostatique au fond du récipient. Elle est la somme de la pression atmosphérique p_0 et de la pression de l'eau $m_e\, g\, L\, \sin\alpha$,

$$p = p_0 + m_e\, g\, L\, \sin\alpha$$

De ces deux équations, on tire l'expression de l'angle d'inclinaison du bec α,

$$\sin\alpha = \frac{m_e + m_h}{m_e}\, \frac{h}{L}$$

10.4 Dynamique d'un système homogène et uniforme

Etablir l'expression de la 2^e loi de Newton pour un système fermé constitué d'un fluide homogène et uniforme de masse M en mouvement rectiligne.

$\boxed{10.4}$ **Solution**

1) Pour un système uniforme, la divergence du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ est nulle,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

Par conséquent, la 2^e loi de Newton (10.35) pour un fluide uniforme en mouvement rectiligne se réduit à,

$$\boldsymbol{f}^{\,\text{ext}} = m\dot{\boldsymbol{v}}$$

L'accélération $\boldsymbol{a} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}$ est une grandeur intensive puisqu'elle correspond au rapport de deux grandeurs extensives. On peut donc intégrer cette équation par rapport au volume V du système,

$$\int_V dV\, \boldsymbol{f}^{\,\text{ext}} = \left(\int_V dV\, m \right) \boldsymbol{a}$$

qui prend la forme usuelle,

$$\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = M\,\boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}$ est la force extérieure résultante agissant sur le système.

10.5 Flotteur sphérique

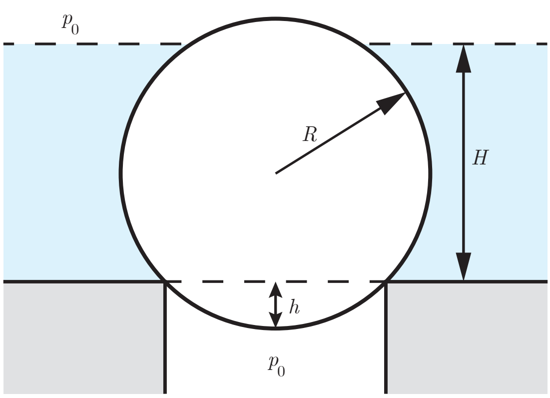

Fig. 10.2 Un flotteur sphérique est utilisé comme bouchon.

Un bouchon sphérique de rayon R bloque un trou circulaire horizontal situé au fond d'un récipient rempli de liquide (fig. 10.2). Le niveau du liquide de densité de masse m dans le récipient est à une hauteur H au-dessus du trou ($H > R/2$) et le point le plus bas de la sphère est à une profondeur h au-dessous du trou ($h < R/2$). La pression au-dessus du liquide et en-dessous de la sphère est la pression atmosphérique p_0. Déterminer la force d'Archimède $\boldsymbol{F}_A$ exercée par le liquide sur le bouchon sphérique,

$$\boldsymbol{F}_A = - \int_S p \, d\boldsymbol{S}$$

10.5 Solution

Afin de déterminer la force d'Archimède $\boldsymbol{F}_A$ exercée par le liquide sur le flotteur sphérique, on doit d'abord déterminer la force infinitésimale $d\boldsymbol{F}_A\,(z)$ exercée par le liquide sur un anneau sphérique infinitésimal situé à une hauteur z au-dessus du fond du récipient (fig. 10.3). D'après la définition de la force

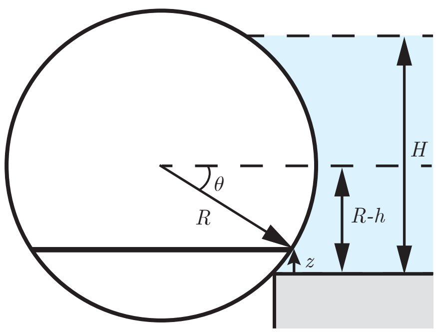

Fig. 10.3 Un anneau sphérique infinitésimal sur la surface du flotteur.

d'Archimède, on a,

$$d\boldsymbol{F}_A\,(z) = -\,p\,(z)\; d\boldsymbol{S}\,(z)$$

La pression $p\,(z)$ exercée par le liquide à la hauteur z est donnée par,

$$p\,(z) = m\,g\,(H - \,z)$$

Par symétrie, le vecteur $d\boldsymbol{S}\,(z)$ est orienté verticalement vers le haut car il pointe hors du liquide. Ainsi, la surface $d\boldsymbol{S}\,(z)$ de l'anneau sphérique infinitésimal est,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S}\,(z) &= R^2\,\sin\theta\,(z)\,\cos\theta\,(z)\;d\theta\,(z)\int_0^{2\pi} d\phi\,\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= 2\pi\,R^2\,\sin\theta\,(z)\;d\Big(\sin\theta\,(z)\Big)\,\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

où $\hat{\boldsymbol{z}}$ est le vecteur unité le long de l'axe z orienté vers le haut et le facteur $\sin\theta\,(z)$ rend compte de la projection de la surface infinitésimale $d\boldsymbol{S}\,(z)$ le long de l'axe z. Par inspection graphique, on déduit que,

$$\sin\theta\,(z) = \frac{R - \,h - \,z}{R} \qquad \text{et ainsi} \qquad d\Big(\sin\theta\,(z)\Big) = -\,\frac{1}{R}\,dz$$

Ainsi, l'élément de surface infinitésimale devient,

$$d\boldsymbol{S}\,(z) = -\,2\pi\,(R-\,h-\,z)\;dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

et la force infinitésimale est écrite en termes de la coordonnée verticale z comme,

$$d\boldsymbol{F}_A\,(z) = 2\pi\,m\,g\,(H-\,z)\,(R-\,h-\,z)\;dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

L'intégrale sur la coordonnée verticale z s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_A = 2\pi\,m\,g\int_0^H(H-\,z)\,(R-\,h-\,z)\;dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

ou de manière équivalente comme,

$$\boldsymbol{F}_A = 2\pi\,m\,g\int_0^H\Big(H\,(R-\,h)-\,z\,H-\,z\,(R-\,h)+z^2\Big)\,dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ainsi, la force d'Archimède est donnée par,

$$\boldsymbol{F}_A = \pi\,m\,g\,H^2\left(R-\,h-\,\frac{H}{3}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

10.6 Profil de température de l'atmosphère terrestre

Modéliser le profile de température $T(z)$ de l'atmosphère terrestre comme fonction de la hauteur z. Ignorer les vents, les nuages et de nombreux effets dus à la présence d'humidité et traiter l'air comme un gaz parfait. Supposer que l'atmosphère terrestre atteint un état d'équilibre principalement dû au transfert de matière. Supposer que le déplacement d'une masse d'air vers le haut ou vers le bas est un processus adiabatique parce que la conductivité de l'air est faible.

1) Montrer que,

$$T\,(z) = T_0 - \frac{g}{c_p^*}\,z$$

où c_p^* est la chaleur spécifique par unité de masse à pression constante.

2) Déduire du profile de température $T\,(z)$, le profil de pression $p\,(z)$ et le profil de densité de masse $m\,(z)$ de l'atmosphère terrestre,

$$p\,(z) = p_0\left(\frac{T\,(z)}{T_0}\right)^{c+1} \qquad \text{et} \qquad m\,(z) = m_0\left(\frac{T\,(z)}{T_0}\right)^{c}$$

où c est défini en (5.60).

$\boxed{10.6}$ Solution

1) Pour un processus adiabatique, la différentielle de l'énergie interne dU est due seulement au travail infinitésimal $\delta W = -\,p\,dV$ effectué sur l'air,

$$dU = c\,N R\,dT = -\,p\,dV$$

Vu que l'air peut être traitée comme un gaz parfait,

$$U = c\,N R T = c\,p\,V$$

où la pression p est une fonction du volume V. Ainsi,

$$\frac{dU}{dV} = c\,\frac{dp}{dV}\,V + c\,p = -\,p$$

ce qui implique que,

$$\frac{dV}{V} = -\,\frac{c}{c+1}\,\frac{dp}{p}$$

La différentielle de l'énergie interne dU devient,

$$dU = c\,N R\,dT = \frac{c\,V}{c+1}\,dp$$

La pression hydrostatique $p\,(z)$ décroît linéairement avec l'altitude,

$$dp = -\,m\,g\,dz$$

Ainsi,

$$\frac{dT}{dz} = -\,\frac{m\,g\,V}{(c+1)\,N R}$$

A l'aide de la définition de la chaleur spécifique à pression constante par unité de masse,

$$c_p^* = \frac{C_p}{m\,V} = \frac{(c+1)\,N R}{m\,V}$$

le gradient de température gradient se réduit à,

$$\frac{dT}{dz} = -\,\frac{g}{c_p^*} \qquad \text{ainsi} \qquad dT = -\,\frac{g}{c_p^*}\,dz$$

En intégrant cette relation de la position initiale z_0 où la température est T_0 à la position finale z où la température est $T\,(z)$, on obtient,

$$T\,(z) = T_0 - \frac{g}{c_p^*}\,z$$

2) D'après la propriété (5.83),

$$\frac{T^{\,c+1}}{p} = \text{cste}$$

où $c+1 = c\gamma$, on déduit le profil de pression du profil de température,

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{c+1}$$

Compte tenu de la propriété,

$$m\,V = \text{cste}$$

et de l'équation d'état du gaz parfait,

$$\frac{p\,V}{T} = c\,N R = \text{cste} \qquad \text{on obtient} \qquad \frac{p}{m\,T} = \text{cste}$$

On en déduit la relation suivante,

$$\frac{m(z)}{m_0} = \frac{p(z)\,T_0}{p_0\,T(z)}$$

A l'aide du profile de pression en fonction de la température, on obtient le profil de masse en fonction de la température,

$$m(z) = m_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{c}$$

10.7 Ballon stratosphérique

Modéliser l'ascension d'un ballon de masse M, qui s'élève du sol jusqu'à la stratosphère.[1] Au niveau du sol, le ballon a un volume V_0, qui est plus petit que le volume V_{max} qu'il a quand il est entièrement gonflé. Toutefois, le volume V_0 est suffisant pour soulever la charge utile. Le ballon est rempli d'hélium, qui est considéré comme un gaz parfait. Utiliser le principe d'Archimède (sect.10.5.3) et le modèle de l'atmosphère terrestre établi à l'exercice 10.6.

1) Déterminer la hauteur maximale z_{max} atteinte par le ballon.
2) Montrer que la force d'Archimède $\boldsymbol{F}_A$ exercée sur le ballon est indépendante de la hauteur du ballon tant qu'il n'est pas entièrement gonflé.

$\boxed{10.7}$ Solution

1) Le profil de masse (sect.10.6) s'écrit,

$$m(z_{\text{max}}) = m_0 \left(\frac{T(z_{\text{max}})}{T_0} \right)^{c} = m_0 \left(1 - \frac{g}{c_p^*\,T_0}\, z_{\text{max}} \right)^{c}$$

---

(1) T. Yamagami, Y. Saito, Y. Matsuzuka, M. Namiki, M. Toriumi, R. Yokota, H. Hirosawa, K. Matsushima, *Development of the highest altitude balloon*, Advances in Space Research **33** 1653-1659 (2004).

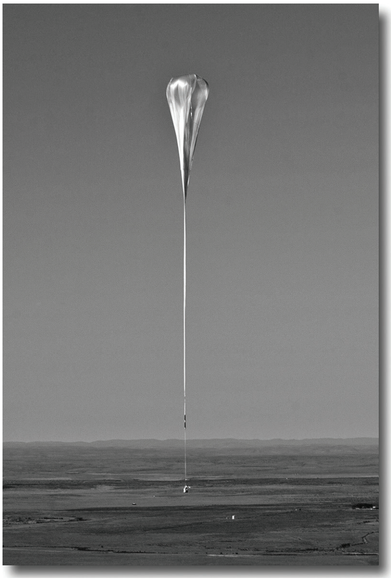

Fig. 10.4 Un ballon stratosphérique juste après le décollage.

ce qui implique que la hauteur maximale z_{max} est donnée par,

$$z_{\text{max}} = \frac{c_p^* T_0}{g} \left(1 - \frac{m(z_{\text{max}})}{m_0}\right)^{1/c}$$

A la hauteur maximale z_{max}, la force d'Archimède (sect. 10.5.3) est égale et opposée au poids. Ainsi, ces forces ont des normes égales,

$$m(z_{\text{max}}) V_{\text{max}} \, g = M \, g$$

ce qui implique que,

$$m(z_{\text{max}}) = \frac{M}{V_{\text{max}}}$$

Ainsi, la hauteur maximale z_{max} est mise sous la forme,

$$z_{\text{max}} = \frac{c_p^* T_0}{g} \left(1 - \frac{M}{m_0 V_{\text{max}}}\right)^{1/c}$$

2) Lorsque le ballon monte, i.e. $V < V_{\text{max}}$, la pression à l'intérieur du ballon est égale à la pression atmosphérique et le ballon est toujours à l'équilibre thermique avec l'air atmosphérique car il monte si lentement. A l'altitude z, la force d'Archimède est donnée par,

$$\boldsymbol{F}_A(z) = m(z) \, V(z) \, g \, \hat{\boldsymbol{z}}$$

Comme la masse d'hélium dans le ballon est constante,

$$m V = \text{cste} \qquad \text{ainsi} \qquad m(z) \, V(z) = m_0 V_0$$

Par conséquent, la force d'Archimède est constante,

$$\boldsymbol{F}_A(z) = m_0 V_0 \, g \, \hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{cste}$$

10.8 Champ de vitesse dans un tube

Un fluide s'écoule dans un tube qui a une forme telle que le champ de vitesse dépend linéairement de la position x le long du tube (fig. 10.5). A l'entrée ($x = 0$), la vitesse est v_0. A la sortie ($x = L$), la vitesse est $3\,v_0$. Déterminer l'accélération $a\,(x)$ d'un petit volume de fluide.

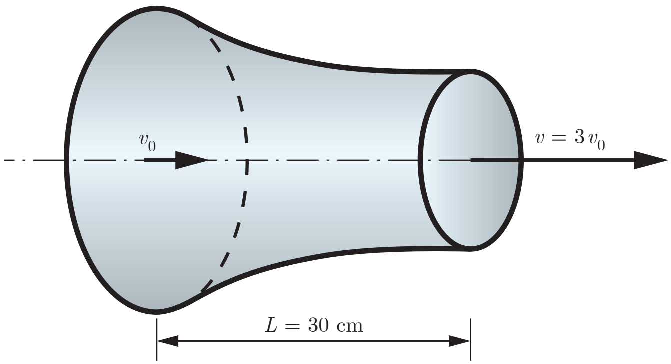

Fig. 10.5 Un tube impose un certain champ de vitesse $v\,(x, t)$ au fluide to the fluide qui s'écoule dans le tube.

Application numérique

$v_0 = 3$ m/s, $L = 0.3$ m.

$\boxed{10.8}$ **Solution**

Le champ de vitesse $v\,(x, t)$ est une fonction linéaire de la coordonnée spatiale x et une fonction du temps t. A l'instant initial $t = 0$, le petit élément de fluide est à l'entrée. A l'instant final $t = t_f$, il est à la sortie. Le champ de vitesse $v\,(x, t)$ doit satisfaire les conditions initiale et finale,

$$v\,(0, 0) = v_0 \qquad \text{et} \qquad v\,(L, t_f) = 3\,v_0$$

Ainsi, le champ de vitesse est donné par,

$$v\,(x, t) = v_0 \left(1 + \frac{2\,x}{L}\right)$$

Le champ d'accélération $a\,(x, t)$ est obtenu en prenant la dérivée temporelle dans le référentiel du fluide (10.18) du champ de vitesse,

$$a\,(x, t) = \dot{v}\,(x, t) = \partial_t\, v\,(x, t) + v\,(x, t)\,\partial_x\, v\,(x, t)$$

Le champ de vitesse est un champ stationnaire car il ne dépend pas explicitement du temps, i.e. $\partial_t\, v\,(x, t) = 0$. Ainsi, le champ d'accélération $a\,(x, t)$ s'écrit,

$$a\,(x, t) = v_0 \left(1 + \frac{2\,x}{L}\right) \frac{2\,v_0}{L} = \frac{2\,v_0^2}{L} \left(1 + \frac{2\,x}{L}\right)$$

ce qui implique que,

$$a\,(0, 0) = \frac{2\,v_0^2}{L} = 60\,\text{m/s} \qquad \text{et} \qquad a\,(L, t_f) = \frac{6\,v_0^2}{L} = 180\,\text{m/s}$$

10.9 Divergence d'un champ de vitesse

Etablir l'équation de continuité (10.34) pour la densité de masse en déterminant la variation de masse à l'intérieur d'une boîte cubique infinitésimale située à une position écrite en coordonnées cartésiennes comme (x, y, z). La boîte a des faces carrées orthogonales aux axes de coordonnées cartésiennes et les dimensions des arrêtes de la boîte infinitésimales sont dx, dy et dz. Le champ de vitesse est $\boldsymbol{v}\,(x, y, z)$.

$\boxed{10.9}$ **Solution**

D'abord, on considère les faces d'une boîte cubique qui sont orthogonales à l'axe x. Le débit de masse à travers la face située en position $x - dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x\,(x - dx/2, y, z)$ et le débit de masse à travers la face située en position $x + dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x\,(x + dx/2, y, z)$. La variation infinitésimale de la masse dM_x à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt est due au débit de masse à travers ces deux faces. Ainsi, la variation infinitésimale de masse s'écrit,

$$\begin{aligned} dM_x = m &\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) v_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt \\ &- m \left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) v_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

où $m\,(x, y, z)$ est la densité de masse. Les signes dans le membre de droite de cette équation sont dus au fait que la vitesse $v_x\,(x - dx/2, y, z)$ est positive pour un débit entrant de masse et la vitesse $v_x\,(x + dx/2, y, z)$ est positive pour un débit sortant de masse. Les développements limités au premier ordre des densités de masse $m\,(x \pm dx/2, y, z)$ et des vitesses $v_x\,(x \pm dx/2, y, z)$ sont donnés par,

$$\begin{aligned} m \left(x \pm \frac{dx}{2}, y, z\right) &= m\,(x, y, z) \pm \frac{1}{2}\,\partial_x\, m\,(x, y, z)\; dx \\ v_x \left(x \pm \frac{dx}{2}, y, z\right) &= v_x\,(x, y, z) \pm \frac{1}{2}\,\partial_x\, v_x\,(x, y, z)\; dx \end{aligned}$$

Compte tenu de ce résultat, l'expression pour la variation infinitésimale de masse devient,

$$\begin{aligned} dM_x = &\left(m - \frac{1}{2}\,\partial_x\, m\, dx\right) \left(v_x - \frac{1}{2}\,\partial_x\, v_x\, dx\right) dy\,dz\,dt \\ &- \left(m + \frac{1}{2}\,\partial_x\, m\, dx\right) \left(v_x + \frac{1}{2}\,\partial_x\, v_x\, dx\right) dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

et se réduit à,

$$dM_x = -\,\left(v_x\, \partial_x\, m + m\, \partial_x\, v_x\right) dx\,dy\,dz\,dt$$

De manière similaire, la variation infinitésimale de masse dM_y à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, dû au débit de masse à travers les deux faces orthogonales à l'axe y, est donnée par,

$$dM_y = -\left(v_y\,\partial_y\,m + m\,\partial_y\,v_y\right) dx\,dy\,dz\,dt$$

et la variation infinitésimale de masse dM_z à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, dû au débit de masse à travers les deux faces orthogonales à l'axe z, s'écrit,

$$dM_z = -\left(v_z\,\partial_z\,m + m\,\partial_z\,v_z\right) dx\,dy\,dz\,dt$$

La dérivée partielle de la densité de masse par rapport au temps est définie comme,

$$\partial_t\,m = \frac{dM_x + dM_y + dM_z}{dx\,dy\,dz\,dt}$$

ce qui implique que,

$$\partial_t\,m = -\left(v_x\,\partial_x + v_y\,\partial_y + v_z\,\partial_z\right) m - m\left(\partial_x\,v_x + \partial_y\,v_y + \partial_z\,v_z\right)$$

A l'aide des relations vectorielles,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} &= v_x\,\partial_x + v_y\,\partial_y + v_z\,\partial_z\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} &= \partial_x\,v_x + \partial_y\,v_y + \partial_z\,v_z\end{aligned}$$

La dérivée partielle de la densité de masse par rapport au temps est mise sous la forme suivante,

$$\partial_t\,m = -\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) m - \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) m$$

A l'aide de la définition (10.18) de la dérivée temporelle dans le référentiel du fluide,

$$\dot{m} = \partial_t\,m + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) m$$

on obtient l'équation de continuité (10.34) pour la masse,

$$\dot{m} + \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) m = 0$$

10.10 Fluide dans un récipient accéléré

Un récipient avec des parois verticales et une base rectangulaire est soumis à une accélération constante $\boldsymbol{a}$ orientée vers la droite. On suppose que le liquide de densité de masse m à l'intérieur du récipient est à l'équilibre par rapport au récipient et que les frottement sont négligeables.

1) Déterminer la pression dans le liquide comme fonction de la coordonnée horizontale x et de la coordonnée vertical z.
2) Montrer que la surface du liquide est inclinée vers l'arrière avec un angle d'inclinaison constant α (fig. 10.6). Déterminer l'expression pour α.

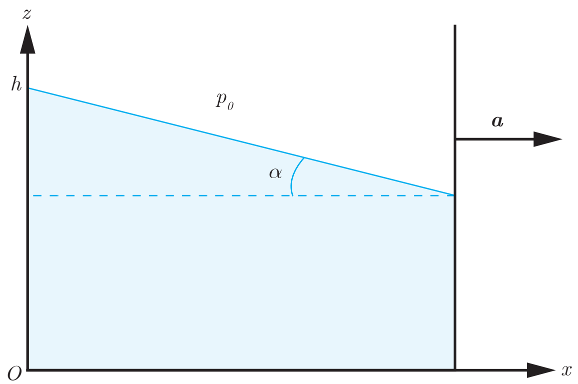

Fig. 10.6 Un récipient rempli de liquide est soumis à une accélération constante. Dans un état stationnaire, la surface de l'eau est inclinée vers l'arrière avec un angle d'inclinaison constant α.

$\boxed{10.10}$ Solution

1) En absence de frottement visqueux, la seule densité de force extérieure exercée sur un volume infinitésimal de liquide est son poids spécifique,

$$\boldsymbol{f}^{\,\text{ext}} = m\,\boldsymbol{g}$$

Etant donné qu'il n'y a pas de cisaillement et de frottement, i.e. $\tau^{\,\text{fr}} = 0$, d'après l'équation (10.81), la divergence du tenseur des contraintes se réduit à l'opposé du gradient de pression,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = -\,\boldsymbol{\nabla}\,p$$

Ainsi, la 2e loi de Newton (10.35) peut être mise sous la forme,

$$\boldsymbol{\nabla}\,p = -\,m\,\boldsymbol{a} + m\,\boldsymbol{g}$$

Le gradient de pression $\boldsymbol{\nabla}\,p$ est exprimé en coordonnées cartésiennes comme,

$$\boldsymbol{\nabla}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial p}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

L'accélération $\boldsymbol{a}$ et le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{a} = a\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{g} = -\,g\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

ce qui implique que,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\,m\,a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\,m\,g$$

La différentielle de la pression peut être mise sous la forme,

$$dp\,(x,z) = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = -\,m\,a\,dx - \,m\,g\,dz$$

La pression $p\,(x,z)$ est obtenue par intégration sur les coordonnées spatiales x et z,

$$p\,(x,z) = -\,m\,a\,x -\ m\,g\,z + p\,(0,0)$$

où la constante d'intégration $p\,(0,0)$ correspond à la pression à l'origine O du référentiel. La pression $p\,(0,0)$ est la somme de la pression atmosphérique p_0 et de la pression hydrostatique d'une colonne de liquide $m\,g\,h$,

$$p\,(0,0) = p_0 + m\,g\,h$$

Ainsi, la pression au point (x,z) à l'intérieur du liquide s'écrit,

$$p\,(x,z) = -\,m\,a\,x -\ m\,g\,z + p_0 + m\,g\,h$$

2) L'équation précédente peut être mise sous la forme,

$$z = -\,\frac{a}{g}\,x + h -\ \frac{p -\ p_0}{m\,g}$$

A la surface du liquide, la pression est simplement la pression atmosphérique, i.e. $p = p_0$. Ainsi, la relation précédente se réduit à,

$$z = -\,\frac{a}{g}\,x + h \qquad\qquad \text{(à la surface)}$$

ce qui correspond à une droite avec une pente négative étant donné que a, g et h sont des constantes positives. Ainsi, l'angle d'inclinaison α est déterminé en calculant le rapport des coordonnées,

$$\tan\alpha = -\,\frac{z}{x} = \frac{a}{g} \qquad\qquad \text{ainsi} \qquad\qquad \alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$